

Esercizio 1 Determinare l'insieme di derivabilità e calcolare le derivate delle seguenti funzioni utilizzando le regole di derivazione:

$$x^3(1+x^2)(1-x^2), \quad \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \quad e^x(\sin x + \cos x), \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin x}, \quad \frac{\arcsin x}{1 - x^2}, \quad x^\alpha \ln x, \quad x \arctan x, \quad \sin(\sqrt{x^2 + 1}), \quad \ln(1 + e^{x^2}).$$

Esercizio 2 Studiare la derivabilità in $x = 0$ delle seguenti funzioni

$$|x| \sin x, \quad |x|(x^2 + 1), \quad x \sin(|x|), \quad \sqrt{x} \sin x, \quad (x^2 + 1)\sqrt{x}, \quad |x|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad .$$

Esercizio 3 Studiare la derivabilità della funzione $\log(|x|)$ nel suo dominio e calcolarne la derivata.

Più in generale, sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo. Studiare continuità e derivabilità della funzione $\log(|f(x)|)$ nel suo dominio naturale e calcolarne la derivata.

Esercizio 4 Sia

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

Dire se la funzione f è continua ed è derivabile in \mathbb{R} . Ripetere l'esercizio per la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La derivata di g è continua in \mathbb{R} ? È derivabile in \mathbb{R} la funzione $h(x) = |x|^\alpha \sin(1/x)$, se $x \neq 0$, $h(0) = 0$, se $\alpha \in (1, 2)$?

Esercizio 5 Sia $f(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$ definita in $x \in \mathbb{R}$.

- i. Determinare l'insieme dei punti di derivabilità della funzione f .
- ii. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $(1, f(1))$ e $(-2, f(-2))$.
- iii. Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico $(x_0, f(x_0))$, dire per quali valori x_0 la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici $y = x$ e $y = -x$.

Esercizio 6 Nei seguenti casi, dire se la funzione è continua, se è derivabile una volta, se è derivabile due volte in $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & x < 0 \\ \frac{1 - x}{1 + x^2} & x \geq 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}$$

Esercizio 7 Mostrare che la funzione $f(x) = 3x + \arctan x + 1$ è iniettiva. Calcolare il dominio dell'inversa. Calcolare la derivata dell'inversa in $x = 1$.

Esercizio 8 Dire se esiste il massimo (minimo) della funzione $f(x) = \ln(2 + \cos^2 x)$ nell'intervallo $[4, 5]$ e, in caso affermativo, si dica se è positivo, negativo o nullo. Cosa si può dire in \mathbb{R} ?

Esercizio 9 Dire se esiste il massimo (minimo) della funzione $f(x) = x^7 - 3x^4 + x^3 - 2x + 4$ nell'intervallo $[2, 11]$. Cosa si può dire in \mathbb{R} ? Ripetere l'esercizio per la funzione $f(x) = -x^6 + 2x^5 - x^3 + x^2 - 12$.

Esercizio 10 Si provi che l'equazione

$$2x^2 = x e^{-x}$$

ammette una ed una sola soluzione positiva in \mathbb{R} .

Esercizio 11 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } x \in [0, 1] \\ x^2 - \lambda x + \lambda & \text{per } x \in (1, 2] \end{cases}$$

si determini il parametro reale λ in modo che sia applicabile in $[0, 2]$ il Teorema di Lagrange e si calcolino i punti di cui il teorema afferma l'esistenza.

Esercizio 12 Studiare il grafico della funzione (I ordine)

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 4}{x + 3}\right)$$

Esercizio 13 Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

se ne determinino estremo superiore ed inferiore nell'intervallo $(-1, +\infty)$ precisando se sono massimi e/o minimi, in caso affermativo si determinino anche i punti di massimo e minimo.

Esercizio 14 Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}.$$

Si consideri un intervallo $I = [\frac{1}{4}, a]$, per $a > \frac{1}{4}$. Si determini a in modo che sia applicabile a I il Teorema di Rolle, e si trovino i corrispondenti punti ξ di cui il teorema afferma l'esistenza.

Esercizio 15 Si determinino estremo superiore ed inferiore della funzione

$$f(x) = e^{|x-1|}$$

nell'intervallo $(-1, 2)$ e si precisi se sono massimo e minimo. In caso affermativo si trovino i corrispondenti punti di massimo e minimo.

Esercizio 16 Sia f un funzione derivabile in $(0, +\infty)$ e continua in 0. Si supponga che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0).$$

Si provi che esiste $\xi \in (0, +\infty)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Esercizio 17 Dire se l'equazione $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 30x + 8 = 0$ ha una soluzione $x_0 \in (0, 1)$. Esiste anche una soluzione negativa? Ne esiste una $x_1 > x_0$?

Esercizio 18 Data la funzione $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2$ dire se l'equazione $f(x) = \lambda$ ha soluzioni e quante, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 19 Usando il Teorema di Lagrange, dimostrare che

$$\begin{aligned} |\arctan x - \arctan y| &\leq |x - y|, & x, y \in \mathbb{R}, \\ |e^x - e^y| &\leq 3|x - y|, & x, y \in (-1, 1), \\ |e^{-x^2} - e^{-y^2}| &\leq |x - y|, & x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 20 Dimostrare che le seguenti funzioni sono strettamente crescenti

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4), \quad g(x) = \frac{1}{42}x^7 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

Esercizio 21 Provare che valgono le seguenti disuguaglianze

$$1 + x \leq e^x \quad x \in \mathbb{R}, \quad \ln(1 + x) \leq x \quad x > -1,$$

Esercizio 22 Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $\arctan x = x^3 + x$.
VeroFalso

Esercizio 23 Sia $f(x)$ una funzione definita e di classe C^1 in \mathbb{R} .

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h} = f'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ V F
2. se $f(0) < 0$ allora esiste $c \in (0, 1)$ tale che $f(1) < f'(c)$ V F
3. se esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ V F
4. se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ allora esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ V F

Esercizio 24 Sia $f(x)$ una funzione definita e di classe C^1 in \mathbb{R} con $f(0) = 0$

1. la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}$ può essere prolungata con continuità in 0 V F
2. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ V F
3. se f è monotona crescente allora lo è anche g V F
4. se f è un infinitesimo di ordine superiore a x per $x \rightarrow 0$ allora g è derivabile in 0 V F

Esercizio 25 Sia $f(x)$ una funzione definita e di classe C^1 in \mathbb{R} , $[a, b]$ un intervallo fissato con $c \in (a, b)$.
Supponiamo che $f(a) = f(b) = f(c)$

1. la funzione f ha esattamente due punti con derivata nulla in (a, b) V F
2. se $f'(c) > 0$ e $m \in (0, f'(c))$ allora esiste $d \in (a, b)$ con $f'(d) = m$ V F
3. se $f'(c) = 0$ allora c è un punto di massimo o minimo relativo V F
4. se a, b, c sono punti di massimo assoluto in $[a, b]$ per f allora f è costante V F